$\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$

Άρα $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Ισχύει ότι $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{\vec{x}, \vec{y}\}$ Γ.Ε (άσκηση)

01/04/2019

Αν $\vec{x}, \vec{y} \in E$, $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$, τότε η γωνία $\theta = \measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$ είναι η μοναδική γωνία θ ($\theta \in [0, 2\pi]$) έτσι ώστε: $\cos(\theta) = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$

Πότε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ καλούνται κάθετα?

Απάντηση: Αν $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, δηλαδή ισοδύναμα $\theta = \measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{\pi}{2}$

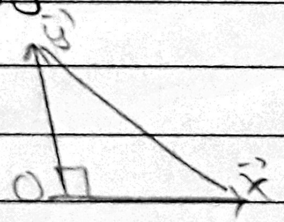
Από τώρα και στο εξής θα γράφουμε:

$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos(\measuredangle(\vec{x}, \vec{y})) = 0 \Leftrightarrow \measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{\pi}{2}$

!Παρατήρηση: ① $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle =$
$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle =$
$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

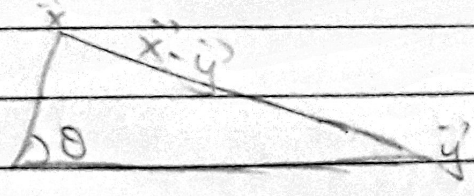
Άρα $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

Πυθαγόρειο Θεώρημα



② $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} \rangle =$
$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$
$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cos(\theta)$

Νόμος συνημιτόνων

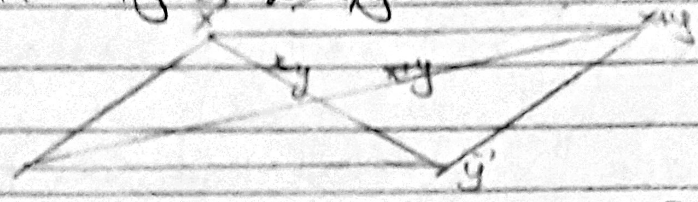


(3) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle + \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} \rangle$

$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x},\vec{y} \rangle + \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x},\vec{y} \rangle =$

$= 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$

Νόμος παραλληλογράμμου



Πότε $\vec{x} \perp \vec{y}$; (Δηλαδή πότε το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο?)
Δηλαδή πότε το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα $\vec{x},\vec{y}$ είναι ορθογώνιο?
Όταν $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}+\vec{y}\|^2$

(4) $\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x}+\vec{y} \perp \vec{x}-\vec{y}$

$\Updownarrow$

$\langle \vec{x},\vec{x} \rangle - \langle \vec{x},\vec{y} \rangle + \langle \vec{y},\vec{x} \rangle - \langle \vec{y},\vec{y} \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|\vec{x}\|^2 = \|\vec{y}\|^2$

$\Leftrightarrow \|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$

$\Leftrightarrow$ Το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα $\vec{x},\vec{y}$ είναι ρόμβος

Εφαρμογή (1) $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$, $\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$\forall \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$\langle \vec{x},\vec{y} \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

$|\langle \vec{x},\vec{y} \rangle| \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$: $|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

$\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

(2) $(\mathbb{R}_n[t], \langle , \rangle)$, $\langle P(t), Q(t) \rangle = \int_0^1 P(t) \cdot Q(t)\, dt$

$\left| \int_0^1 P(t) Q(t)\, dt \right| \le \sqrt{\int_0^1 P(t)^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 Q(t)^2 dt}$

Άσκηση: Ανισότητα Minkowski : $(\mathbb{R}_n[t], \langle , \rangle)$

Πρόταση: Αν $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ μη μηδενικά διανύσματα σε έναν Ευκλείδειο χώρο $(E, <,>)$ και τα οποία είναι ανά δύο κάθετα $\forall i,j = 1, \dots, n : i \neq j \Rightarrow \vec{x_i} \perp \vec{x_j}$. Τότε: $\{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$ Γ.Α

Απόδειξη: Επαγωγή στο πλήθος n των διανυσμάτων $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$:

- Αν $n=1$, τότε $\vec{x_1} \neq \vec{0}$ και άρα το $\{\vec{x_1}\}$: Γ.Α
- Επαγωγική υπόθεση: $n-1$ το πλήθος μη-μηδενικά και ανά δύο κάθετα διανύσματα είναι Γ.Α
- Γενική περίπτωση: Έστω $\lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 < \vec{x_1}, \vec{x_n} > + \lambda_2 < \vec{x_2}, \vec{x_n} > + \dots + \lambda_{n-1} < \vec{x_{n-1}}, \vec{x_n} > + \lambda_n < \vec{x_n}, \vec{x_n} > = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lambda_n \|\vec{x_n}\|^2 = 0 \\ \vec{x_n} \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{x_n}\|^2 \neq 0 \end{array}\right\} \lambda_n = 0$$

Τότε $\lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_{n-1} \vec{x_{n-1}} = 0$.

Από την επαγωγική υπόθεση $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$

Επειδή και $\lambda_n = 0$, έπεται ότι τα $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ είναι Γ.Α

Ορισμός: Μία βάση $\beta = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ του Ευκλείδειου χώρου $(E, <,>)$ καλείται ορθογώνια $\Leftrightarrow 1 \leq i \neq j \leq n : \vec{e_i} \perp \vec{e_j}$, δηλαδή $<\vec{e_i}, \vec{e_j}> = 0$

Η βάση β καλείται μοναδιαία $\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n : \|\vec{e_i}\| = 1$

Η βάση β καλείται ορθοκανονική (ΟΚΒ) $\Leftrightarrow$ η β είναι ορθογώνια και κανονική.

Ισοδύναμα: $\forall i,j = 1, \dots, n : <\vec{e_i}, \vec{e_j}> = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i=j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

Παραδείγματα ① $(\mathbb{R}^n, <,>)$ και $\beta = \{\vec{e_1} = (1, 0, \dots, 0), \dots \dots, \vec{e_n} = (0, \dots, 0, 1)\}$

$<\vec{e_i}, \vec{e_j}> = <(0, \dots, \underset{\text{i-θέση}}{1}, \dots, 0), (0, \dots, \underset{\text{j-θέση}}{1}, \dots, 0)> = \delta_{ij}, \ 1 \leq i,j \leq n$

Άρα η β είναι ορθοκανονική.

② $(\mathbb{R}_2[t], <,>)$, $<P(t), Q(t)> = \int_0^1 P(t) \cdot Q(t) \, dt$

Κανονική βάση του $\mathbb{R}_2[t]$ είναι η $\beta = \{1, t, t^2\}$

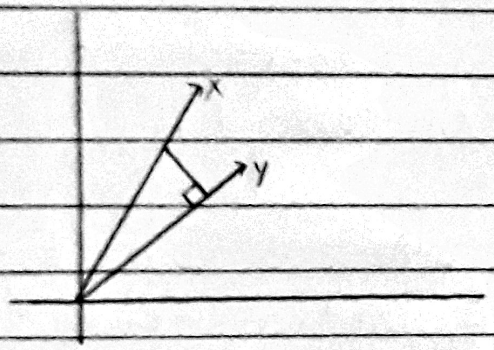
$<1,t> = \int_0^1 1 \cdot t \, dt = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} \neq 0$

Άρα η β δεν είναι ορθοκανονική.

→<u>Πρόβλημα</u>: Έχει κάθε ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης ορθοκανονική βάση?

<u>Απάντηση</u>: Ναι

Έστω $(E, <,>)$ ευκλείδειος χώρος και $\dim_{\mathbb{R}} E = n < \infty$. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, αρκεί να βρούμε n το πλήθος μοναδιαία και ανά δύο κάθετα διανύσματα. Αυτό θα γίνει με την διαδικασία Gramm-Schmidt.



Θεωρούμε διάνυσμα $\lambda\vec{y}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\vec{x} - \lambda\vec{y} \perp \vec{y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{<\vec{x}, \vec{y}>}{<\vec{y}, \vec{y}>}}$$

<u>Ορισμός</u>: Αν $\vec{x}, \vec{y} \in E$ και $\vec{y} \neq \vec{0}$, τότε η ορθογώνια προβολή του $\vec{x}$ στο $\vec{y}$ είναι το διάνυσμα $\Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{<\vec{x}, \vec{y}>}{<\vec{y}, \vec{y}>} \cdot \vec{y}$

<u>Διαδικασία Gramm-Schmidt</u> κατασκευής ορθογώνιας και ορθοκανονικής βάσης του E, ξεκινώντας από μια βάση του χώρου E.

Έστω $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_n}\}$ Γ.Α σύνολο διανυσμάτων στον E. Θα κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων των $\{\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n}\}$.

Βήμα 1: Θέτουμε $\vec{y_1} = \vec{x_1}$

Βήμα 2: Θέτουμε $\vec{y_2} = \vec{x_2} - \Pi_{y_1}(\vec{x_2})$

Βήμα 3: Θέτουμε $\vec{y_3} = \vec{x_3} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_3}) - \Pi_{\vec{y_2}}(\vec{x_3})$

⋮

Βήμα κ: Θέτουμε $\vec{y_\kappa} = \vec{x_\kappa} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_\kappa}) - \Pi_{\vec{y_2}}(\vec{x_\kappa}) - \dots - \Pi_{\vec{y_{\kappa-1}}}(\vec{x_\kappa})$, $1 \le \kappa \le n$

Ισχυρισμός: Το σύνολο $\{\vec{y_1}, \dots, \vec{y_n}\}$ είναι ορθογώνιο και αποτελείται από μη-μηδενικά διανύσματα και άρα $\{\vec{y_1}, \dots, \vec{y_n}\}$ είναι μια ορθογώνια βάση του E.

Θέτοντας $\vec{e_i} = \dfrac{\vec{y_i}}{\|\vec{y_i}\|}$, $1 \le i \le n$, έπεται ότι το σύνολο $\beta = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του E